TRIGONOMETRI
ISSN 3030-8496

Jurnal Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alan
Vol 7 No 3 Tahun 2025
Prefix DOI: 10.3483/trigonometri.v1i1.800

Solusi Persamaan Diferensial Biasa Linear Homogen Orde Tiga dengan Koefisien Konstan Menggunakan Metode Operator Diferensial

Elisabet Djunaidy[1]

[1]Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Kristen Tentena
e-mail: elisabetdjunaidy@gmail.com

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa linear homogen orde tiga dengan koefisien konstan menggunakan metode operator diferensial. Metode ini memerlukan solusi analitik dari persamaan polinomial kubik. Solusi umum persamaan diferensial bersesuaian dengan tiga karakteristik dari akar-akar persamaan kubik, yaitu semua akar riil berbeda, semua akar riil sama, dan satu akar riil dan dua akar kompleks.

Kata Kunci: Metode Operator Diferensial, Persamaan Diferensial Orde Tiga, Persamaan Kubik

Abstract

This research aims to solve a third-order homogeneous linear ordinary differential equation with constant coefficients using the differential operator method. This method requires an analytical solution to the cubic polynomial equation. The general solution of the differential equation corresponds to three characteristics of the roots of the cubic equation, namely all real roots are distinct, all real roots are equal, and one real root and two complex roots.

Keywords: *Differential Operator Method, Third Order Differential Equations, Cubic Equations*

Article History
Received: Juli 2025
Reviewed: Juli 2025
Published: Juli 2025
Plagirism Checker:
No 234.GT8.,35
Prefix DOI :
10.3483/trigonometri.v1i1.

Publishby :
Trigonometri

Pendahuluan

Persamaan diferensial berperan penting dalam bidang teknik, fisika, kimia, biologi, dan sebagainya. Persamaan diferensial seringkali digunakan pada pemodelan matematika karena persamaan ini memuat turunan yang dapat diartikan sebagai laju perubahan [1]-[2]. Suatu masalah matematika yang telah dimodelkan akan ditentukan solusi dari fungsi yang tidak diketahui pada persamaan diferensial. Metode penyelesaian dari persamaan diferensial dibagi dalam dua pendekatan, yaitu metode analitik dan metode numerik. Metode analitik dapat menjadi pilihan untuk memperoleh solusi yang sebenarnya dalam menyelesaikan persamaan diferensial. Di lain sisi, metode numerik menghasilkan solusi yang mendekati solusi sebenarnya. Keakuratan solusi dengan menggunakan metode numerik dipengaruhi oleh tingkat ketelitian yang digunakan. Penggunaan metode analitik dalam proses penyelesaian persamaan diferensial yang kompleks

Jurnal Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Vol 7 No 3 Tahun 2025
Prefix DOI: 10.3483/trigonometri.v1i1.800
ISSN 3030-8496

cukup sulit ditentukan solusinya dan bahkan tidak dapat diselesaikan [3]. Metode penyelesaian persamaan diferensial dengan operator diferensial digunakan pada orde dua [2], [4] dan [5]. Oleh karena metode ini memerlukan solusi eksak dari persamaan kuadrat untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde dua. Dengan demikian, apabila suatu persamaan diferensial memiliki orde n, maka dengan metode operator diferensial diperlukan solusi dari persamaan polinomial pangkat n untuk dapat menyelesaikan persamaan diferensial tersebut.

Dengan penelitian yang terus berkembang, tidak hanya persamaan kuadrat yang memiliki rumus kuadrat untuk memperoleh akar persamaan, persamaan kubik telah menemukan penyelesaian akar persamaannya secara analitik. Solusi persamaan polinomial kubik menggunakan perhitungan fungsi. Metode penyelesaian persamaan kubik, yaitu sebagai berikut [6]:

Bentuk umum persamaan polinomial kubik

$$at^3 + bt^2 + ct + d = 0. \tag{1}$$

Dengan membagi persamaan kubik (1) dengan a diperoleh

$$t^3 + \frac{b}{a}t^2 + \frac{c}{a}t + \frac{d}{a} = 0. \tag{2}$$

Solusi dari (2) ialah sebagai berikut

$$t = z + \left[U + \sqrt{U^2 + V^3}\right]^{1/3} + \left[U - \sqrt{U^2 + V^3}\right]^{1/3}, \tag{3}$$

dengan $f(t) = t^3 + \frac{b}{a}t^2 + \frac{c}{a}t + \frac{d}{a}$, $f''(z) = 0$, $U = -\frac{f(z)}{2}$, dan $V = \frac{f'(z)}{3}$.

Diskriminan, D, dari persamaan (3) adalah

$$D = U^2 + V^3 \tag{4}$$

Penentuan akar-akar persamaan polinomial kubik berdasarkan nilai diskriminan dapat dikelompokkan sebagai berikut:

$D < 0$ menyatakan persamaan kubik memiliki semua akar riil berbeda,
$D = 0$ menyatakan persamaan kubik memiliki semua akar rill sama,
$D > 0$ menyatakan persamaan kubik memiliki satu akar riil dan dua akar kompleks.

Akar-akar persamaan kubik dengan $D < 0$, yaitu:

$$t_1 = z + 2\sqrt{-V}\cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{U}{\sqrt{(-V)^3}}\right)\right), \tag{5}$$

$$t_2 = z + 2\sqrt{-V}\cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{U}{\sqrt{(-V)^3}}\right) + \frac{2}{3}\pi\right), \tag{6}$$

$$t_3 = z + 2\sqrt{-V}\cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{U}{\sqrt{(-V)^3}}\right) + \frac{4}{3}\pi\right). \tag{7}$$

Akar-akar persamaan kubik untuk $D > 0$, yaitu satu akar riil $t_1 = t$, yakni persamaan (3), dan dua akar kompleks berikut:

$$t_{2,3} = z - \frac{1}{2}S \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\sqrt{S^2 + 4V}, \tag{8}$$

dengan $S = \left[U + \sqrt{U^2 + V^3}\right]^{1/3} + \left[U - \sqrt{U^2 + V^3}\right]^{1/3}$.

Penelitian sebelumnya telah membahas pembuktian secara analitik untuk solusi persamaan diferensial biasa linear homogen orde dua [4]. Salah satu metode penyelesaian yang digunakan adalah metode operator diferensial. Metode ini melibatkan proses penentuan akar-akar persamaan polinomial. Selanjutnya penelitian ini akan menyelesaikan persamaan diferensial biasa linear homogen orde tiga dengan koefisien konstan.

ISSN 3030-8496
Jurnal Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Vol 7 No 3 Tahun 2025
Prefix DOI: 10.3483/trigonometri.v1i1.800

Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan jenis penelitian deskriptif kuantitatif dengan langkah-langkah penelitian sebagai berikut [4]:

1) Menganalisis metode operator diferensial yang akan digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa linear homogen orde tiga.
2) Menuliskan persamaan diferensial dengan model turunan sebenarnya.
3) Mengasumsikan operator diferensial, $t = \frac{d}{dx}$, dan mengganti $\frac{d}{dx}$ pada persamaan diferensial dengan operator diferensial yang ditetapkan.
4) Mengfaktorkan ruas kiri persamaan diferensial dengan fungsi yang akan ditentukan, y.
5) Menentukan akar-akar dari persamaan polinomial kubik.
6) Mengintegralkan persamaan operator diferensial yang telah dikalikan dengan y dan dilakukan pemisahan variabel.
7) Menyimpulkan solusi akhir persamaan diferensial biasa linear homogen orde tiga.

Hasil dan Pembahasan

Bentuk umum persamaan diferensial biasa linear homogen orde tiga dengan koefisien konstan:

$$ay''' + by'' + cy' + d = 0 \tag{9}$$

Bagi persamaan (1) dengan a dan tuliskan kembali persamaan menjadi

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{b}{a}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{c}{a}\frac{dy}{dx} + \frac{d}{a}y = 0 \tag{10}$$

Misalkan operator diferensial

$$\frac{d}{dx} = t \tag{11}$$

Substitusi persamaan (11) ke persamaan (10)

$$t^3y + \frac{b}{a}t^2y + \frac{c}{a}ty + \frac{d}{a}y = 0 \tag{12}$$

Faktorkan persamaan (12) dengan y

$$\left(t^3 + \frac{b}{a}t^2 + \frac{c}{a}t + \frac{d}{a}\right)y = 0$$

Agar solusi trivial tidak diperoleh, asumsikan bahwa $y \neq 0$, sehingga

$$t^3 + \frac{b}{a}t^2 + \frac{c}{a}t + \frac{d}{a} = 0. \tag{13}$$

Akar dari persamaan (13) dapat diperoleh mengikuti penyelesaian persamaan polinomial kubik dari persamaan (3) hingga (8).

Mengalikan persamaan (11) dengan y diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = ty \tag{14}$$

Selanjutnya penyelesaian persamaan diferensial (14) dilakukan dengan mengintegralkan persamaan tersebut sebagai berikut:

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = tdx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int tdx$$

Jurnal Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Vol 7 No 3 Tahun 2025
Prefix DOI: 10.3483/trigonometri.v1i1.800
ISSN 3030-8496

$$\Rightarrow \ln y = tx + c$$

Jadi, solusi umum dari persamaan diferensial (9) adalah

$$\therefore y = Ce^{tx} \tag{15}$$

Solusi (15) bergantung pada karakteristik dari akar persamaan (13).

Penyelesaian persamaan diferensial biasa linear homogen orde tiga dapat diterapkan pada tiga contoh yang mewakili setiap karakteristik akar persamaan kubik.

Contoh 1:

Selesaikanlah persamaan orde tiga berikut

$$y''' - 10y'' + 31y' - 30y = 0. \tag{16}$$

Penyelesaian:

Persamaan (16) dapat dituliskan kembali menjadi

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 10\frac{d^2y}{dx^2} + 31\frac{dy}{dx} - 30y = 0 \tag{17}$$

Substitusi persamaan (11) dan faktorkan dengan y persamaan (17) menjadi

$$(t^3 - 10t^2 + 31t - 30)y = 0 \tag{18}$$

Karena $y \neq 0$, maka pembuat nol dari persamaan (18), yaitu

$$t^3 - 10t^2 + 31t - 30 = 0 \tag{19}$$

Berdasarkan persamaan (19), misalkan

$$f(t) = t^3 - 10t^2 + 31t - 30 \tag{20}$$

dengan turunan pertama dan kedua dari fungsi f terhadap t sebagai berikut:

$$f'(t) = 3t^2 - 20t + 31 \tag{21}$$

dan

$$f''(t) = 6t - 20. \tag{22}$$

Dari persamaan (22), nilai z dapat ditentukan, yaitu

$$f''(z) = 0$$
$$\Leftrightarrow 6z - 20 = 0$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{10}{3}. \tag{23}$$

Nilai $f(z)$ dan $f'(z)$ dapat diperoleh dengan mengganti nilai z pada persamaan (23) ke persamaan (20) dan (21) berikut

$$f(z) = f\left(\frac{10}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}\right)^3 - 10\left(\frac{10}{3}\right)^2 + 31\left(\frac{10}{3}\right) - 30 = -\frac{20}{27}$$

dan

$$f'(z) = f'\left(\frac{10}{3}\right) = 3\left(\frac{10}{3}\right)^2 - 20\left(\frac{10}{3}\right) + 31 = -\frac{7}{3}.$$

Karena nilai diskriminan, $D = U^2 + V^3 = \left(\frac{10}{27}\right)^2 + \left(-\frac{7}{9}\right)^3 = -\frac{1}{3} < 0$, maka akar riil berbeda diperoleh, yaitu

$$\begin{aligned} t_1 &= z + 2\sqrt{-V}\cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{U}{\sqrt{(-V)^3}}\right)\right) \\ &= \frac{10}{3} + 2\sqrt{\frac{7}{9}}\cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{\frac{10}{27}}{\sqrt{\left(\frac{7}{9}\right)^3}}\right)\right) \\ &= \frac{10}{3} + \frac{5}{3} \end{aligned} \tag{24}$$

ISSN 3030-8496
Jurnal Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Vol 7 No 3 Tahun 2025
Prefix DOI: 10.3483/trigonometri.v1i1.800

$$= 5$$

$$\begin{aligned} t_2 &= z + 2\sqrt{-V}\cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{U}{\sqrt{(-V)^3}}\right)+\frac{2}{3}\pi\right) \\ &= \frac{10}{3} + 2\sqrt{\frac{7}{9}}\cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{\frac{10}{27}}{\sqrt{\left(\frac{7}{9}\right)^3}}\right)+\frac{2}{3}\pi\right) \\ &= \frac{10}{3} - \frac{4}{3} \\ &= 2 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} t_3 &= z + 2\sqrt{-V}\cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{U}{\sqrt{(-V)^3}}\right)+\frac{4}{3}\pi\right) \\ &= \frac{10}{3} + 2\sqrt{\frac{7}{9}}\cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{\frac{10}{27}}{\sqrt{\left(\frac{7}{9}\right)^3}}\right)+\frac{4}{3}\pi\right) \\ &= \frac{10}{3} - \frac{1}{3} \\ &= 3 \end{aligned} \quad (26)$$

Berdasarkan akar-akar persamaan (24), (25), dan (26), solusi persamaan diferensial (16) adalah

$$y = C_1e^{5x} + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}.$$

Contoh 2:
Selesaikanlah persamaan orde tiga berikut

$$y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0. \quad (27)$$

Penyelesaian:
Persamaan (16) dapat dituliskan kembali menjadi

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 6\frac{d^2y}{dx^2} + 12\frac{dy}{dx} + 8y = 0 \quad (28)$$

Substitusi persamaan (11) dan faktorkan dengan y persamaan (28) menjadi

$$(t^3 + 6t^2 + 12t + 8)y = 0 \quad (29)$$

Karena $y \neq 0$, maka pembuat nol dari persamaan (29), yaitu

$$t^3 + 6t^2 + 12t + 8 = 0 \quad (30)$$

Berdasarkan persamaan (30), misalkan

$$f(t) = t^3 + 6t^2 + 12t + 8, \quad (31)$$

Maka turunan pertama dan kedua dari fungsi f terhadap t ialah sebagai berikut:

$$f'(t) = 3t^2 + 12t + 12 \quad (32)$$

dan

$$f''(t) = 6t + 12. \quad (33)$$

Dari persamaan (33), nilai z dapat ditentukan, yaitu

$$\begin{aligned} f''(z) &= 0 \\ \Leftrightarrow 6z + 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow z &= -2. \end{aligned} \quad (34)$$

Nilai $f(z)$ dan $f'(z)$ dapat diperoleh dengan mengganti nilai z pada persamaan (34) ke persamaan (31) dan (32) berikut:

$$f(z) = f(-2) = (-2)^3 + 6(-2)^2 + 12(-2) + 8 = 0$$

ISSN 3030-8496
Jurnal Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Vol 7 No 3 Tahun 2025
Prefix DOI: 10.3483/trigonometri.v1i1.800

dan

$$f'(z) = f'(-2) = 3(-2)^2 + 12(-2) + 12 = 0.$$

Karena $U = -\frac{f(z)}{2} = 0$ dan $V = \frac{f'(z)}{3} = 0$, maka nilai diskriminan, $D = 0$.

$$t_{1,2,3} = z = -2. \tag{35}$$

Dengan demikian, dari akar rill sama (35), solusi dari persamaan diferensial (27) adalah

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-2x} x + C_3 e^{-2x} x^2.$$

Contoh 3:
Selesaikanlah persamaan orde tiga berikut

$$y''' - y'' + 3y' - 3y = 0. \tag{36}$$

Penyelesaian:
Persamaan (36) dapat dituliskan kembali menjadi

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 3y = 0 \tag{37}$$

Substitusi persamaan (11) dan faktorkan dengan y persamaan (37) menjadi

$$(t^3 - t^2 + 3t - 3)y = 0 \tag{38}$$

Karena $y \neq 0$, maka pembuat nol dari persamaan (38), yaitu

$$t^3 - t^2 + 3t - 3 = 0 \tag{39}$$

Berdasarkan persamaan (39), misalkan

$$f(t) = t^3 - t^2 + 3t - 3 \tag{40}$$

dengan turunan pertama dan kedua dari fungsi f terhadap t sebagai berikut:

$$f'(t) = 3t^2 - 2t + 3 \tag{41}$$

dan

$$f''(t) = 6t - 2. \tag{42}$$

Dari persamaan (42), nilai z dapat ditentukan, yaitu

$$f''(z) = 0$$
$$\Leftrightarrow 6z - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{3}. \tag{43}$$

Nilai $f(z)$ dan $f'(z)$ dapat diperoleh dengan mengganti nilai z pada persamaan (43) ke persamaan (40) dan (41) berikut

$$f(z) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{3}\right) - 3 = -\frac{56}{27}$$

dan

$$f'(z) = f'\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right) + 3 = \frac{8}{3}.$$

Karena nilai diskriminan, $D = U^2 + V^3 = \left(\frac{28}{27}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^3 = \frac{16}{9} > 0$, maka satu akar riil dan dua akar kompleks diperoleh, yaitu

$$t_1 = z + S = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \tag{44}$$

dan karena

$$S = \left[U + \sqrt{U^2 + V^3}\right]^{\frac{1}{3}} + \left[U - \sqrt{U^2 + V^3}\right]^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{28}{27} + \frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{28}{27} - \frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3},$$

sehingga

Jurnal Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Vol 7 No 3 Tahun 2025
Prefix DOI: 10.3483/trigonometri.v1i1.800

$$t_{2,3} = z - \frac{1}{2}S \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\sqrt{S^2 + 4V} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right) \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{8}{9}\right)} = \pm\sqrt{3}i. \tag{45}$$

Berdasarkan akar-akar persamaan (44) dan (45), solusi dari persamaan diferensial (36) adalah

$$y = C_1 e^x + C_2 \sin\left(\sqrt{3}x\right) + C_3 \cos\left(\sqrt{3}x\right).$$

Kesimpulan

Persamaan diferensial biasa linear homogen orde tiga dengan koefisien konstan dapat diselesaikan menggunakan metode operator diferensial. Metode ini memerlukan solusi dari persamaan polinomial kubik. Solusi analitik dari persamaan diferensial tersebut dipengaruhi oleh nilai determinan dari persamaan polinomial kubik. Berdasarkan nilai determinan, terdapat tiga kemungkinan solusi kubik, yaitu semua akar riil berbeda jika determinan bernilai negatif, semua akar riil sama jika determinan bernilai nol, dan satu akar riil dan dua akar kompleks jika determinan bernilai positif.

Daftar Pustaka

[1] A. K. Pandey and T. Srivastava, "Mathematical Modelling: Growing Role and Applications," *Journal of Applied Science and Education,* vol. 01, no. 01, pp. 1-11, 2021.

[2] Maswar and M. MT, "Analisis Metode Mutua dan Aplikasinya terhadap Deferensial Linear Orde-n," *KADIKMA: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika,* vol. 13, no. 3, pp. 203-218, 2022.

[3] D. Kusumawati, K. Nisak and A. Wibowo, "Penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa dengan Metode Euler dan Heun Menggunakan Microsoft Excel," *GAUSS: Jurnal Pendidikan Matematika,* vol. 08, no. 01, pp. 14-27, 2025.

[4] G. E. Inah, "Analiytical Proof of the Solution to Second Order Linear Homogeneous Diferential Equation," *Open Acces Library Journal,* vol. 10, no. e9537, pp. 1-24, 2023.

[5] B. Turmetov, "On Certain Operator Method for Solving Differential Equations.," *Filomat,* vol. 13, no. 13, pp. 4275-4286, 2017.

[6] A. T. Tiruneh, "A Simplified Expression for the Solution of Cubic Polynomial Equations Using Function Evaluation," ResearchGate, Swaziland, 2020.